ریاضی ۳ — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری-شهریور ماه ۱۳۸۷

۱- اگر $A=\left\{x \,\middle|\, x\in R, -۱\le \frac{x-۲}{۳}<۱\right\}$ و $B=\left\{x \,\middle|\, x\in R, |x|<۲\right\}$ باشد حاصل $A\cap B$ را به صورت بازه نمایش دهید.

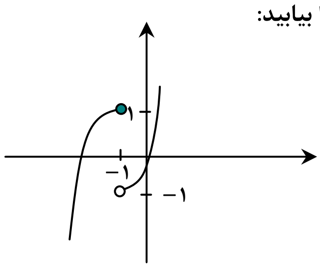
۲- اگر معادله سهمی به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد و a,b,c را طوری بیابید که سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کرده و از نقطه $A(۱,-۲)$ نیز بگذرد.

۳- دامنه تعریف تابع $f(x)=\frac{۲+\sqrt{۳+x}}{\sqrt{-x}}$ را تعیین کنید.

۴- الف) اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۳x+k$ باشد مقدار k را طوری بیابید که : $fog(x)=gof(x)$

ب) اگر $f(x)=\sqrt{۲x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ باشد ، دامنه $(f+g)(x)$ را بدست آورید.

۵- با توجه به نمودار تابع f حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید:



الف) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$

۶- هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۳+x^۲-۲x}{x-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{\sin ۳x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[۲x+۱]}{x-۲}$

د) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱}}{۵x+\sqrt{۴x^۲+۱}}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}^+}\tan(x+\frac{\pi}{۳})$

۷- تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۲)x-۳ & x>۲\\ -x^۲+۱ & x\le ۲\end{cases}$ مفروض است. a را طوری بیابید که تابع در نقطه $x=۲$ دارای حد باشد.

۸- اگر $\sin ۲x+۱<۳f(x)+۲<\cos ۳x$ باشد ، مطلوب است:

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

۹- مقادیر a,b را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}a|۱-۳x| & x>۱\\ [۲x+۲] & x=۱\\ bx^۲+x+۱ & x<۱\end{cases}$$

۱۰- تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+5}}{x^2-5x+6}$ در چه فاصله‌هایی پیوسته است؟

۱۱- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ را وقتی متغیر x از ۱ به ۱/۲ تغییر می‌کند بدست آورید.

۱۲- مشتق‌های تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x)=\dfrac{7}{(x+4)^3}$　　ب) $g(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}\right)^2$　　ج) $h(x)=\sqrt{\sin 5x}+4\tan^3 2x$

۱۳- معادله خط قائم بر منحنی $y=\dfrac{1}{2x+1}$ را در نقطه‌ای به طول ۱- واقع بر منحنی را بدست آورید.

۱۴- تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ مفروض است. a,b,c را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول ۱ دارای می‌نیمم بوده و $A(0,1)$ نقطه عطف منحنی باشد.

۱۵- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=-x^3+3x^2+1$ را رسم کنید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

۱-

$$-1 \le \frac{x-2}{3} < 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \le x-2 < 3 \Rightarrow -1 \le x < 5 \Rightarrow A \cap B = [-1,2)$$

$$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

۲-

$$(0,2) \in f \Rightarrow 2 = c$$

$$\begin{matrix} (-1,0) \in f \Rightarrow 0 = a-b+c \\ f(1) = -2 \Rightarrow -2 = a+b+c \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-3 \\ b=-1 \end{matrix}$$

۳-

$$\begin{matrix} 3+x \ge 0 \Rightarrow x \ge -3 \\ -x > 0 \Rightarrow x < 0 \end{matrix} \Rightarrow D_f = \{x \mid x \in R, -3 \le x < 0\}$$

۴-

الف) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = 3(2x+1)+k = 6x+3+k$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(3x+k) = 2(3x+k)+1 = 6x+2k+1$

$\Rightarrow 6x+3+k = 6x+2k+1 \Rightarrow k = 2$

ب) $\begin{matrix} 2x \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow D_f = [0,+\infty) \\ x \ne 0 \Rightarrow D_g = (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \end{matrix} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0,+\infty)$

۵- الف) ۱-   ب) ۱   ج) چون $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ پس تابع در $x=-1$ حد ندارد

۶-

الف) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+x^2-2x}{x-1} = \frac{0}{0}$ رفع ابهام: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x(x+2)}{1} = 3$

ب) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x} = \frac{0}{0}$ رفع ابهام $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x} \times \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x(\sqrt{x+4}+2)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{3\sin 3x} \times \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{12}$

ج) $= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{[2x+1]}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

د) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-|x|}{5x+|2x|} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+x}{5x-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$

هـ) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x+\frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{2})^+ = -\infty$

۷-

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a+2)x-3 = 2a+1 \ , \ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x^2+1) = -3 \Rightarrow 2a+1 = -3 \Rightarrow a = -2$$

۸-

$$\lim_{x \to 0} \sin 2x + 1 = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos 3x = 1$$

بنابر قضیه فشردگی $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} (3(f)+2) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{3}$

۹-

شرط پیوستگی $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = a|-2| = 2a, f(1) = 4, \lim_{x \to 1^-} f(x) = b+2 \Rightarrow 2a = b+2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}$$

۱۰- مخرج کسر نباید صفر شود.

$x^{۲}-۵x+۶\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۲$ یا $x\neq ۳$

فاصله‌های پیوستگی: $(-\infty,۲)\cup(۲,۳)\cup(۳,+\infty)$

-۱۱

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۱/۲)-f(۱)}{۱/۲-۱}=\frac{\frac{۲}{۲/۲}-\frac{۲}{۱+۱}}{۰/۲}=\frac{\frac{-۰/۲}{۲/۲}}{۰/۲}=-\frac{۱}{۲/۲}$$

-۱۲

الف) $f'(x)=\dfrac{-۲۱(x+۴)^{۲}}{(x+۴)^{۶}}$

ب) $g'(x)=۲\times\dfrac{(\sqrt{x})'(۱+x^{۳})-(۱+x^{۳})'\sqrt{x}}{(۱+x^{۳})^{۲}}\times\dfrac{\sqrt{x}}{۱+x^{۳}}=\left(\dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+x^{۳})-۳x^{۲}(\sqrt{x})}{(۱+x^{۳})^{۲}}\right)۲\left(\dfrac{\sqrt{x}}{۱+x^{۳}}\right)$

ج) $h'(x)=\dfrac{۵\mathrm{Cos}\,۵x}{۲\sqrt{\mathrm{Sin}\,۵x}}+۲۴\tan^{۲}۲x(۱+\tan^{۲}۲x)$

-۱۳

$f(-۱)=-۱$ $\quad y'=\dfrac{-۲}{(۲x+۱)^{۲}}\Rightarrow$ شیب خط مماس $=f'(-۱)=\dfrac{-۲}{(۲+(-۱)+۱)^{۲}}=-۲\Rightarrow$ شیب خط قائم $=\dfrac{۱}{۲}$

$y-y_{۰}=m(x-x_{۰})\Rightarrow y+۱=\frac{۱}{۲}(x+۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$

-۱۴

$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\Rightarrow f'(۱)=۳+۲a+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۳$

$(۰,۱)\in f\Rightarrow ۱=c$

$f''(x)=۶x+۲a\Rightarrow f''(۰)=۰+۲a=۰\Rightarrow a=۰$

$۲a+b=-۳\Rightarrow b=-۳$

-۱۵

$x=۳\Rightarrow y=۱\quad y'=-۳x^{۲}+۶x=۰\Rightarrow \left.\begin{matrix}x=۰\rightarrow y=۱\\ x=۲\rightarrow y=۵\end{matrix}\right\}$ نقطه کمکی

$y''=۶-۶x=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۳$

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	۲	۳	$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	
y	$+\infty$ ↘	۵ ↘	۱ ↗	۳ ↗	۵ ↘	۱ ↘	$-\infty$